جملة مجاورات العنصر الحيادي في زمرة طبولوجية:

من مبرهنة سابقة نستنتج أنه إذا عرفنا مجاورة للعنصر الحيادي $e$ يمكن معرفة مجاورة لأي نقطة $x$

مبرهنة:

إذا كانت $\{U\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي $e$ في الزمرة الطبولوجية $G$ عندئذٍ فإن $\{xU\}$ ، $\{Ux\}$ $\forall x \in G$ تشكلان قاعدتين للطبولوجيا في $G$

البرهان:

لتكن $a \in G$ ولتكن $W$ مجاورة مفتوحة للعنصر $a$ بما أن التطبيق $\lambda_a : x \to ax$ هوميومورفيزم بحيث $a^{-1}W = \lambda_a^{-1}(W)$ مجاورة مفتوحة للعنصر $e$ وبما أن $\{U\}$ جملة أساسية للمجاورات للعنصر $e$ يوجد $U \in \{U\}$ بحيث

$U \subseteq a^{-1}W \Rightarrow aU \subseteq W \Rightarrow \{aU\}$

تشكل جملة أساسية للجوارات للنقطة $a$ وحسب المبرهنة في الطبولوجيا فإن $\{xU\}$ ; $\forall x \in G$ تشكل قاعدة في $G$

وهذه المبرهنة هي الشرط اللازم والكافي كي تكون أسرة المجموعات المفتوحة $B$ قاعدة للطبولوجيا في $X$ هو أن تكون أسرة المجموعات $\{V\} = \{V ; V \in B ; x \in V\}$ جملة أساسية للجوارات للنقطة $x$ وذلك من أجل كل $x \in X$

وبنفس الطريقة نبرهن أن $\{Ux\}$ هي قاعدة للطبولوجيا في $G$

بناء زمرة طبولوجية من أخرى:

إن الزمر الجزئية، زمر القسمة، زمر الجداء، من الزمر الطبولوجية هي زمر تنتج من أخرى

فإذا كانت $G$ زمرة طبولوجية و $H$ زمرة جزئية من $G$ عندئذٍ $H$ تشكل مع الطبولوجيا المولدة من $G$ ما يسمى بالزمرة الطبولوجية الجزئية. بشكل عام إذا كانت $G$ زمرة طبولوجية عندئذٍ فإن $G/H$ أي أسرة المجموعات $\{xH\}$ حيث $x \in G$ تشكل زمرة تسمى زمرة القسمة لـ $G$ على $H$ فإذا كان $\pi$ التطبيق القانوني فإننا نعرف طبولوجيا القسمة على $G/H$ بالشكل الآتي: أي مجموعة $W$ من $G/H$ تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $\pi^{-1}(W)$ مفتوحة في $G$

فإن $G/H$ تكون زمرة نصف طبولوجية ونبين أنه إذا كانت $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ أسرة من الزمر النصف طبولوجية عندئذٍ فإن الجداء الديكارتي $G=\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ يكون زمرة نصف طبولوجية حيث الطبولوجية المعرفة عليها هي طبولوجيا الجداء

مبرهنة:

إذا كانت من أجل أي $\alpha\in A$ $G_\alpha$ زمرة نصف طبولوجية فإن الجداء $G=\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ يكون أيضاً زمرة نصف طبولوجية

البرهان:

من أجل ذلك نبرهن أن التطبيق $g: G\times G\to G$ مستمر في أي نقطة $(x,y)$ من $G\times G$

$(x,y)\longmapsto xy$

لتكن $W$ مجاورة ما للنقطة $xy=(x_\alpha y_\alpha)$ عندئذٍ توجد مجموعة مفتوحة إبتدائية $U$ بحيث يكون $xy\in U\subseteq W$ ولكن $U=\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ حيث $U_\alpha=G_\alpha$ من أجل جميع $\alpha\in A$ باستثناء عدد منتهٍ من الأدلة

فإذا كانت $\beta$ مجموعة الأدلة المنتهية $B\subseteq A$ حيث $U_\alpha\neq G_\alpha$ من أجل أي $\alpha\in\beta$ وتكون $U_\alpha$ مجموعة مفتوحة في $G_\alpha$ وبما أن $G_\alpha$ زمرة نصف طبولوجية وذلك من أجل أي $\alpha\in A$ من أجل $\alpha\in\beta$ يكون $x_\alpha y_\alpha\in U_\alpha \Leftarrow$ توجد مجاورة $V_\alpha$ لـ $y_\alpha$ بحيث يكون $x_\alpha V_\alpha\subseteq U$ فإذا أخذنا $V=\prod_{\alpha\in A} V_\alpha$ بحيث يكون $V_\alpha=G_\alpha$ من أجل $\alpha\in A-\beta$ فإن $V$ تكون مجاورة لـ $y$ في $G$ أي أن $x_\alpha y_\alpha\in x_\alpha V_\alpha\subseteq U_\alpha$ وذلك من أجل أي $\alpha\in A$ ومنه ينتج أن

$xy=(x_\alpha y_\alpha)\in xV\subseteq U$

أي أن التطبيق $g$ مستمر في $y$ $\forall y\in G$ وبنفس الطريقة نبرهن أن $g$ مستمر في $x$ وبالتالي فإن $G=\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ تكون زمرة نصف طبولوجية